

2021 年國際資訊奧林匹亞 研習營初選 模擬賽

2021.02.28 14:00-17:00

請確認隨身電子設備（手機等）已關機。

請等待監考人員宣布測驗開始才翻頁作答。

系統資訊

評分主機：<https://codeforces.com/group/GG44hyrVLY/contest/316970>

帳號：你的 Codeforces 帳號

密碼：你的 Codeforces 密碼

題目列表

題目名稱	時間限制	記憶體限制
A 格雷碼 / A_Decode	1.0 秒	512 MiB
B 黑白棋與監禁生活 / B_Reversi	0.5 秒	512 MiB
C 秋收萬顆子 / C_Polygon	1.0 秒	512 MiB
D 天使島大地主視察事件 / D_Traverse	1.0 秒	512 MiB
E 小軒小羽取石子 / E_Stone	1.0 秒	512 MiB

說明事項

1. 本測驗採電腦線上自動評分，程式必須依規定上傳至評分主機。請嚴格遵守每一題目所規定之輸出格式。若未遵守，該題將以 0 分計算。
2. 本測驗採取全面回饋機制，程式上傳至評分主機後，將自動編譯並進行測試。視等待評分題數多寡，該題測試結果及該題得分數將可於短時間內得知。程式可重複上傳及評分，但同一題兩次上傳之間必須間隔二分鐘以上。每題的每個子題之最終分數以該子題所有單次評分結果之最高分計算，每題之最終分數為所有子題最終分數之總和。
3. 程式執行時，每筆測試資料執行時間個別計時（以評分主機執行時間為準）。執行時間限制如前頁所示。程式執行超過執行時間視同未完成，該組測試資料得分將以 0 分計算。每題可使用記憶體空間，除非題目另有規定，以 512 MB 為限。
4. 本次測驗程式送審時須上傳原始程式碼（.c, .cpp），輸出入皆以標準輸入、標準輸出進行。注意：所有讀寫都在執行檔的工作目錄下進行，請勿自行增修輸出入檔的等名或路徑，若因此造成評分程式無法評分，該次評分結果將以 0 分計算。
5. 若使用 C++ 撰寫程式，請在程式碼開頭加上 `#include<cstdio>`，並利用 `scanf()` 讀入資料。使用 `cin` 讀入資料可能會因為讀入效率太差以致於程式執行時間超過限制。`scanf()` 常用的讀入方式如下：

`scanf("%d", &x);` 讀入一個有號整數至 `int` 型態變數 `x`。

`scanf("%lld", &y);` 讀入一個有號整數至 `long long` 型態變數 `y`。

`scanf("%u", &x);` 讀入一個有號整數至 `unsigned int` 型態變數 `x`。

`scanf("%llu", &y);` 讀入一個有號整數至 `unsigned long long` 型態變數 `y`。

This page is intentionally left blank.

第一題：格雷碼 (Decode)

問題敘述

傳統的二進位系統，例如數字 3 的 3 位表示法為 011，要切換為鄰近的數字 4，也就是 100 時，裝置中的三個位元都得要轉換，因此於未完全轉換的過程時裝置會經歷短暫的 010, 001, 101, 110, 111 等其中數種狀態，也就是代表著 2, 1, 5, 6, 7，因此此種數字編碼方法於鄰近數字轉換時有比較大的誤差可能範圍。格雷碼 (Gray Code) 的發明即是用來將誤差之可能性縮減至最小，編碼的方式定義為每個鄰近數字都只相差一個位元，因此也稱為最小差異碼，可以使裝置做數字步進時只更動最少的位元數以提高穩定性。—Wikipedia

n 位的格雷碼是 2^n 個相異 01 字串的一種排序方法。產生 n 位格雷碼的方法不只一種，下面給出一種較為常見的生成方法：

- 1 位格雷碼中 "0" 的編碼是 0，"1" 的編碼是 1；
- n 位格雷碼中 ($n \geq 2$)，編號為 i 的字串 ($0 \leq i < 2^{n-1}$) 是由 $(n-1)$ 位格雷碼中編號為 i 的字串加上前綴 "0" 組成；
- n 位格雷碼中 ($n \geq 2$)，編號為 $2^{n-1} + i$ 的字串 ($0 \leq i < 2^{n-1}$) 是由 $(n-1)$ 位格雷碼中編號為 $2^{n-1} - i - 1$ 的字串 (也就是倒數第 $(i+1)$ 個字串) 加上前綴 "1" 組成。

舉例來說：2 位格雷碼總共有 $2^2 = 4$ 個，依序是 "00", "01", "11", "10"。

3 位格雷碼的生成方法如下表所示：

編號	字串	編號	字串
0	$0 + 00 = 000$	4	$1 + 10 = 110$
1	$0 + 01 = 001$	5	$1 + 11 = 111$
2	$0 + 11 = 011$	6	$1 + 01 = 101$
3	$0 + 10 = 010$	7	$1 + 00 = 100$

給一個 01 字串 s ，請判斷如果由以上方式生成格雷碼，該字串的編碼是多少？

因為答案可能很大，請將輸出對 $10^9 + 7$ 取模。

有 T 筆測資。

輸入格式

第一行給定一個正整數 T ，代表測資筆數。

每一筆測資的輸入只有一行，包含一個 01 字串 s ，意義如題中所述。

輸出格式

對每一筆測資請輸出一個整數，代表該字串 s 的編碼。輸出請對 $10^9 + 7$ 取模。

測資限制

- $1 \leq T \leq 10^5$ 。
- $1 \leq |s| \leq 10^5$ 。
- $\sum |s| \leq 10^6$ 。
- $s_i \in \{0, 1\}$ 。

輸入範例 1

```
8
0
1
00
01
11
10
10101010101010
0010101000100101111000101000101010001001
```

輸出範例 1

```
0
1
0
1
2
3
52428
377602300
```

評分說明

本題共有 3 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	36	$ s \leq 15$ 。
2	32	$ s \leq 60$ 。
3	32	無額外限制。

This page is intentionally left blank.

第二題：黑白棋與監禁生活 (Reversi)

問題敘述

朋友買了一塊砧板，綠色的邊框帶藍色紋路，當她拿給你們看時，一位喜歡觀看星象的同學說：「啊，好像彗星似的。」

「我看倒有點像鯊鯊。」你說。

「真像厚臉皮的小學生。」一位外號叫「蘿莉控」的同學緊接著說。

你們不禁哄堂大笑，同樣的一塊砧板，每個人卻有不同的感覺。那位朋友連忙把砧板放在廚房，她覺得るしあ就是るしあ，不是彗星，也不是鯊鯊，更不是小學生。

「NEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEE!!!!!!!」突然，一陣大吼聲從廚房傳來，四人直接被這高分貝的吼聲震到失去意識。

等你醒來的時候，你發現你被銬起來，手腳無法動彈了，而你的面前擺著一些黑白棋的棋盤。跟一般的黑白棋不太一樣的是，它的棋盤大小不是一般的 8×8 ，而是從 1×1 到 2000×2000 的都有，上面的每一格都擺滿了黑色朝上或白色朝上的棋子。

るしあ告訴你，你需要用最少的步數把所有棋子都翻成白色才會放你回去，不過當然不會那麼簡單的讓你一個一個翻，你每次需要在「左上一右下對角線」上選兩個**不一定相異**的方格，並將這兩個方格圍出的正方形矩陣內的所有棋子都翻面（黑白棋的棋子有兩面，分別是黑色跟白色）。

你覺得被るしあ監禁的生活好像也不錯，但是你也想幫るしあ解決問題，所以你決定來動動腦。如果你可以幫るしあ解決問題，說不定她會讓你成為不死族喔！

注意：るしあ可能會給你根本不可能把全部棋子都翻成白色的盤面，如果遇到這種情況也請告訴她。

輸入格式

第一行給定一個正整數 N ，代表棋盤的邊長。

接下來 N 行，每行有 N 個字元 $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,N}$ ， $A_{i,j}$ 對應到第 i 行第 j 列的格子。如果該字元是 '0'，代表那個棋子是白色朝上；如果該字元是 '1'，代表那個棋子是黑色朝上。

輸出格式

請輸出一個整數，代表將所有棋子翻成白色朝上的最少操作次數，如果這不可能達成，請輸出 -1 。

測資限制

- $1 \leq N \leq 2000$ °
- $A_{i,j} \in \{0, 1\}$ °

輸入範例 1

```
3
101
010
101
```

輸出範例 1

```
5
```

輸入範例 2

```
5
10011
01101
01001
11110
11100
```

輸出範例 2

```
-1
```

輸入範例 3

```
5
11010
10000
00111
10101
00111
```

輸出範例 3

8

評分說明

本題共有 3 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	17	$N \leq 5$ ，且保證輸入有解。
2	52	$N \leq 80$ 。
3	31	無額外限制。

This page is intentionally left blank.

第三題：秋收萬顆子 (Polygon)

問題敘述

今天風和日麗，又是一個學習的好天氣。大文豪在翻閱著《醜詩三百首》，讀到了醜代詩人李紳的著作：「春種一蘿莉，秋收萬顆子」。

看到這裡，大文豪想要知道這句話的可信度，於是他決定實驗看看，買下一塊三角形的土地，並把他的蘿莉收藏分成三份並埋在他土地的三個頂點處。

很快的，六個月過去了。正當大文豪覺得詩人都在誇大其辭，準備放棄實驗之時，突然有若干道光束接連沖天而起，而伴隨著這些光束出現的，是令人精神振奮的叫聲。聽到這些叫聲的大文豪馬上就認出這是他一直在尋找的 SS 級蘿莉的聲音。

俗話說的好：「近水樓台先得月」。為了把蘿莉們收歸已有 (X) 保護蘿莉 (O)，大文豪決定買下所有有蘿莉存在的區域。而由於管理上的方便，大文豪所購買的區域形狀會是一個凸多邊形，也就是說，他會選定一個凸多邊形的土地，使其可以包含住所有蘿莉們，並將那塊土地買下來。而且在每一種能涵蓋到所有蘿莉的凸多邊形中，他會選擇使面積最小的一種買法，如果有很多種買法，他會從裡面任選一種。可以發現，每次出現新的蘿莉時，大文豪新購買的土地會嚴格包覆住之前的土地。

大文豪還發現，無論何時，都存在一個凸多邊形的土地使所有已經出現的 SS 級蘿莉（包含埋下去的蘿莉收藏）都在此多邊形土地的邊界上。

不過，雖然大文豪很有錢，也仍然逃不出繳稅的命運。面對政府單位派來催繳稅金的可愛蘿莉，大文豪還是需要整理他買的東西才能報稅。於是他整理出一開始蘿莉收藏埋下的地方，以及按照出現時間排序的每一隻 SS 級蘿莉的位置。

請問，大文豪一開始的土地面積以及每次有新的 SS 級蘿莉出現時的土地面積分別是多少？

輸入格式

輸入的第一行包含一個正整數 Q ，代表有多少道光束沖天而起。

接下來 3 行，每行有兩個整數 X_i, Y_i ，代表一開始蘿莉收藏埋下的地方，保證這三個地方不共線。

接下來 Q 行，每行有兩個整數 x_i, y_i ，代表第 i 隻 SS 級蘿莉出現的位置，保證每次新增之後都存在一個凸多邊形使所有蘿莉都在邊界上。

輸出格式

請輸出 $Q + 1$ 個正整數：一開始的土地面積 A_0 以及每一次新的蘿莉出現後的土地面積 $A_1 \sim A_Q$ 。

測資限制

- $0 \leq Q \leq 10^5$ 。
- $|X_i|, |Y_i|, |x_i|, |y_i| \leq 10^9$ ，且 X_i, Y_i, x_i, y_i 都是偶數。

輸入範例 1

```
5
6 0
-4 -4
0 -6
4 -4
-6 0
0 6
-4 4
4 4
```

輸出範例 1

```
18
24
48
84
90
96
```

輸入範例 2

```
1
1000000000 1000000000
-1000000000 1000000000
-1000000000 -1000000000
1000000000 -1000000000
```

輸出範例 2

```
2000000000000000000
4000000000000000000
```

評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	10	$Q = 0$ 。
2	20	$Q = 1$ ，且 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (x_1, y_1)$ 會形成平行於座標軸的矩形。
3	29	$Q \leq 1000$ ， $ X_i , Y_i , x_i , y_i \leq 10^6$ 。
4	41	無額外限制。

This page is intentionally left blank.

第四題：天使島大地主視察事件 (Traverse)

問題敘述

去年，由於惡魔島為了改名為天使島，政府決定通過法律廢除所有刑事處罰，並將一小部分的死刑犯特赦。

如果你對天使島上的天使監獄不夠熟悉，以下是天使監獄的介紹：

天使島上的天使監獄關押著 N 個死刑犯，這些死刑犯都被單獨關押在單一牢房之中，牢房的編號為牢房之中，牢房的編號為 1 到 N ，且犯人身上也有**不盡相同**的罪惡值，代表他所犯下的罪刑輕重。由於天使島的地形實在是太惡魔了（畢竟只是改名，沒辦法連地形一起改），這些單一牢房是建造在島中央最高的山洞內。為了讓天使島上的居民能感覺到從惡魔到天使的變化，所有的牢房都能直接從山洞外進入。不過，為了避免犯人逃走，在進入第一間牢房之後，要抵達其他間牢房必須透過牢房與牢房之間的通道。而且，如果從固定的牢房出發，抵達任何一個死刑犯 x 所在的單一牢房，在不重複經過牢房的前提下，通往死刑犯 x 的牢房路徑總是唯一的。

換句話說，所有的單一牢房在山洞內會連接成一個樹狀結構，每一個節點都代表一間單一牢房。

最近，由於掌管著天使島的大地主小 S 要來視察天使監獄，典獄長需要安排一條路徑讓小 S 按照這條路徑參觀。在天使一般的典獄長與政府協商後，決定要讓小 S 走一條讓他的驚嚇值最小的路線。典獄長會將天使監獄的（樹狀）結構畫在紙上，並遵循「前序走訪」方案來走訪所有的牢房（也就是使用深度優先搜尋的順序），過程中依序記錄他所走訪到的犯人編號；每個犯人的編號在走訪過程中首次遇到時就會記下，且只會記錄一次。全部走訪完畢以後，典獄長再按照紙上紀錄的順序計算驚嚇值。假設典獄長在紙上記下的序列是 (G_1, G_2, \dots, G_N) ，一條路線的驚嚇值被定義為 $G_1 \times 10^{10(N-1)} + G_2 \times 10^{10(N-2)} + \dots + G_i \times 10^{10(N-i)} + \dots + G_N \times 10^{10(N-N)}$ 。

值得注意的是，雖然牢房與牢房之間的連接情形是固定的，但將其樹狀結構畫在紙上卻有許多種不同的畫法，也導致了典獄長的前序走訪方案可能會有所不同。

不過典獄長的演算法能力並不強，沒辦法在短時間內得出最好的走訪方案，於是他來拜託身為御用碼農的你，請你來設計一種走訪方案，走訪的起點（樹根）可能是**任何一間牢房**。

如果沒辦法得到答案，典獄長就會把你監禁在地下室 τ ！

輸入格式

輸入的第一行包含一個正整數 N 。

第二行包含 N 個正整數 g_1, g_2, \dots, g_N ，表示死刑犯的罪惡值。

第三行開始，總共有 $N - 1$ 行，每一行都有兩個正整數 u_i 與 v_i ，代表編號為 u_i 的死刑犯所在的牢房，有一條通道連接著編號為 v_i 的死刑犯所在的牢房。

輸出格式

請輸出 N 個正整數，代表在驚嚇值最小的走訪方案中，典獄長在紙上記下的序列。

測資限制

- $1 \leq N \leq 2000$ 。
- $1 \leq u_i, v_i \leq N$ 。
- $1 \leq g_i \leq 10^9$ 。

輸入範例 1

```
5
1 2 3 4 5
4 2
1 3
5 3
1 2
```

輸出範例 1

```
1 2 4 3 5
```

輸入範例 2

```
7
1 2 4 2 4 3 2
1 2
7 5
6 2
3 7
5 4
7 6
```

輸出範例 2

```
1 2 3 2 4 2 4
```

輸入範例 3

```
5
1 2 2 1 1
1 2
2 3
3 4
4 5
```

輸出範例 3

```
1 1 2 2 1
```

評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	18	$g_i = i$ 。
2	19	$g_1 = 1, \forall i \geq 2, g_i \neq 1$ 。
3	16	$N \leq 300$ 。
4	47	無額外限制。

This page is intentionally left blank.

第五題：小軒小羽取石子 (Stone)

問題敘述

小軒跟小羽是兩位好朋友，小軒家有個矩形的院子鋪滿了正方形的磁磚，下過大雨後院子會積水。小軒把某些區域圍成了大大小小的水坑，因為小羽很喜歡打水漂，在玩打水漂的遊戲時丟了一堆石頭到水坑裡頭。雨過天晴，院子的積水也蒸發了，留在地上的除了磁磚之外只剩下大大小小的石頭。鬼靈精怪的小羽想出了一種既可以把石頭堆整理乾淨，同時又能玩耍的遊戲。本題要請你寫一支程式計算他們玩遊戲的結果。

他們給每顆石頭一個權重，代表拿走這顆石頭之後可以得到的分數。請注意：權重有正有負，因為輸的人要請贏的人一碗拉麵，所以當然應該盡量避免拿到會讓自己分數降低的石頭。小軒很快的發現，只要每次都取權重最高的石頭，那麼結局永遠都是固定且無趣的，於是小軒將石頭依序標上編號 $1, 2, 3, \dots$ ，並追加規則：當你的回合結束的時候，剩下的所有石頭的編號必須**連續**。小軒和小羽都是程式高手，他們馬上就寫出了一個簡單的程式來模擬遊戲過程。

你以為題敘就這樣結束了嗎？你太天真了！

玩了幾輪之後，他們覺得速度實在是太慢了，石頭的數量多到就算拿程式來跑也要跑很久，不過更煩人的是，小軒小羽在自己的回合開始前都會一直玩手機，讓每個回合都無比冗長。所以他們經過商量之後，又決定一個足夠大的參數 K ，以便讓遊戲早些結束。每次輪到一個人行動時，他需要取**恰好** K 顆石頭（除非院子裡剩下不到 K 顆石頭，那就全部取走），並且先前的追加規則也必須遵守。

再說一次，小軒跟小羽都是程式高手，他們馬上就寫出了一個簡單的程式來模擬遊戲過程。這下，問題終於解決了？

小軒跟小羽所寫的程式都能**最大化**自己得到的分數。不過，在早就知道遊戲結局的狀況下，他們又為了如何決定先後手而爭執不斷……

(待續)

輸入格式

第一行給定兩個正整數 N, K ，代表石頭數量跟小軒小羽商量的參數。

第二行給定 N 個整數 a_1, a_2, \dots, a_N ， a_i 代表編號為 i 的石頭的權重。

輸出格式

請輸出兩個整數，分別代表先手跟後手能得到的分數。

測資限制

- $2 \leq N \leq 2 \times 10^5$ 。
- $\frac{N}{100} \leq K \leq N$ 。
- $|a_i| \leq 10^4$ 。

輸入範例 1

8 1
-2 0 2 1 0 -2 2 0

輸出範例 1

2 -1

輸入範例 2

10 2
2 1 4 7 4 8 3 6 4 7

輸出範例 2

26 20

輸入範例 3

17 4
3 -1 4 -1 5 -9 2 -6 5 -3 5 -8 9 -7 9 -3 2

輸出範例 3

1 5

輸入範例 4

17 11
3 -1 4 -1 5 -9 2 -6 5 -3 5 -8 9 -7 9 -3 2

輸出範例 4

12 -6

評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	12	$N \leq 100$, $K = 1$ 。
2	21	$N \leq 3000$, $N \equiv 0 \pmod{K}$ 。
3	38	$N \leq 2 \times 10^4$ 。
4	29	無額外限制。

This page is intentionally left blank.