

## 題目敘述&題解

- 給你一棵邊有權的樹 還有一個起始節點
- 問有從起始節點開始 在經過的邊都要大於等於  $q$  可以到達幾個節點
- 從起點開始 DFS/BFS 不走太小的邊 輸出拜訪的節點數量即可

# 題目 2.二分圖

## 題目敘述

- 給定一張圖，請判斷是否為二分圖。若是，則輸出該二分圖的有效分割之頂點數量 $k$ 最少為多少；否則，輸出0。

## 題解

### 1. 判斷二分圖

- 貪心法：先僅考慮全連通的圖。所有相鄰之頂點都必須分割在不同邊，可以任選一個頂點開始，將其相鄰頂點分在反邊，相鄰的相鄰頂點分在與初始頂點同邊，以此類推。
- 若有一個頂點必須同時分在兩邊，則此圖**不是**二分圖。
- 若能順利分完，則此圖**是**二分圖，且步驟中產生的有效分割為唯一的分割方式。



## 題解

### 2. 求出最小整數 $k$

- 以dfs、bfs等方法執行上述步驟，求出所有連通塊的有效分割。
- 再將所有連通塊中較小一方的數量加總，即為答案 $k$ 。

# 題目 3.平均變異次數



## 題目敘述

- 給定一個字串每種字元出現次數
- 問從所有種字串排列中 一個字串平均相連字元不一樣的次數

## 題解

- 先單看第一個與第二個字相異的機率是  
 $(c[1]/n) * ((n-c[1])/(n-1)) + (c[2]/n) * ((n-c[2])/(n-1)) + \dots$
- 每一個相鄰的字相異的機率都是移樣的 所以在乘上  $n-1$  就是答案



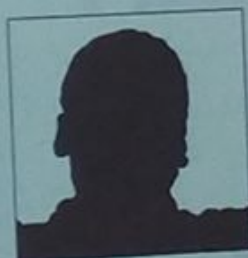
## 題目敘述

- A區有M個城市
- B區有N個城市
- 同一區任兩座城市沒有橋連接->二分圖
- 鋼筋混泥土橋->匹配邊
- 可動橋->未匹配邊
- 從未匹配點走交錯路徑到另一邊的未匹配點最長可以走多遠
- 找出一個最長擴增路徑

## 方法

- 由於交錯路徑數量不超過5,000,000
- 窮舉所有交錯路徑
- DFS backtracking並紀錄經過的點
- $O(|\text{交錯路徑數量}|)$

# 題目 5. 智慧果



# 題目 5. 智慧果



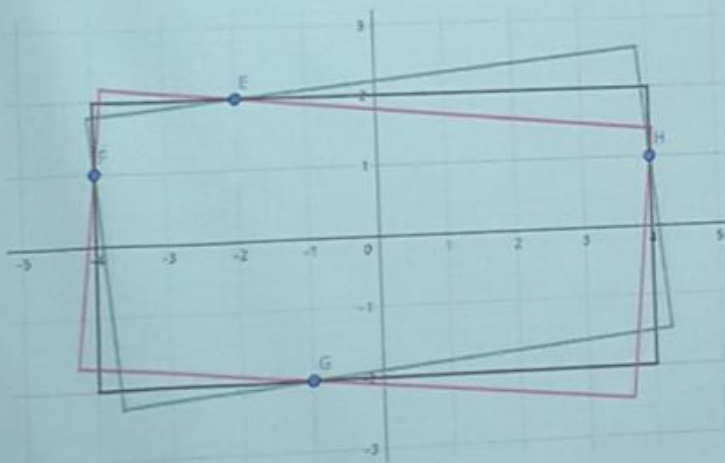


## 題目敘述

- 二維平面上給定 $N$ 個不重複點，請求出覆蓋所有點的最小面積矩形之四個頂點座標。

### 題解

1. 題目需求的最小矩形，必有至少一條邊與凸包的其中一條邊重合。簡略證明：



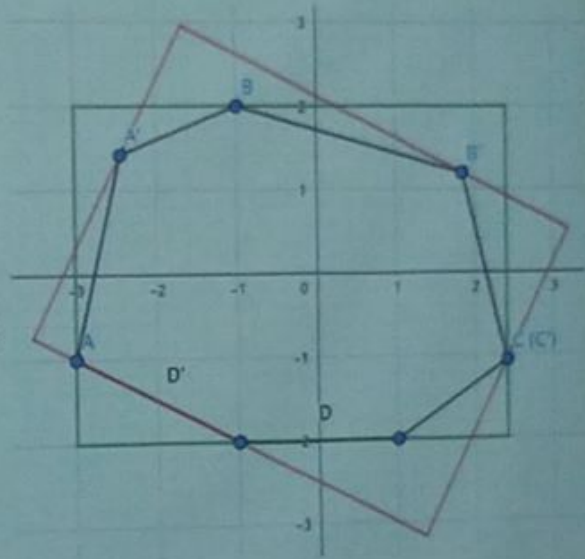
若一矩形之四邊皆與凸包切於一點，則順、逆時針轉同樣角度的兩個矩形(綠和紅)，必有一個面積比原本更小。

因此，只要沒有與凸包之一邊重合，必然不是最佳解。

## 題解

2. 單調性: 假設凸包上的一條邊  $D$ , 與  $D$  重合且覆蓋所有點的最小矩形, 其餘三邊通過  $A, B, C$ 。

令  $D$  在凸包上順時針方向的下一條邊為  $D'$ , 則與  $D'$  重合且覆蓋所有點的最小矩形, 其餘三邊通過的點  $A', B', C'$  必定分別在  $A, B, C$  的順時針方向上。



## 題解

3. 旋轉卡尺: 滿足上述兩個性質後, 就可以依序列舉所有凸包上的邊, 求出與該邊重合的最小矩形, 所有裡面最小的即為答案。

算矩形頂點之值域大約在  $2^{128} / 2^{64}$ , 以double儲存即可達到題目要求的精度範圍。



# 題目 6. 串聯重複(Tandem Repeat)

## 題目敘述

- 給一個字串 S
- 找出連續重複出現子字串中重複最多次的
  - 若重複次數相同, 找長度最長的
  - 若重複次數與長度都相同, 找字典順序最小的
- 字串長度至多 10000

a a b a b a b a ✓

重複次數 3  
長度 2

## 題目敘述

- 給一個字串 S
- 找出連續重複出現子字串中重複最多次的
  - 若重複次數相同, 找長度最長的
  - 若重複次數與長度都相同, 找字典順序最小的
- 字串長度至多 10000

a a b a b a b a a ❌

沒有連續

## 解法 - Dynamic Programming

- $dp_L(i) = s[1:i]$  與  $s[1:i-L]$  的最長共同後綴長度
  - $dp_L(L) = L$
  - 對於  $L < i \leq |s|$

$$dp_L(i) = \begin{cases} dp_L(i-1) + 1 & \text{if } s_i = s_{i-L} \\ 0 & \text{if } s_i \neq s_{i-L} \end{cases}$$

- 枚舉循環節長度  $L = 1 \sim n$ 
  - 循環節長度為  $L$  的最多重複次數為

$$\max_{L \leq i \leq |s|} \left[ \frac{dp_L(i)}{L} \right]$$



## 解法

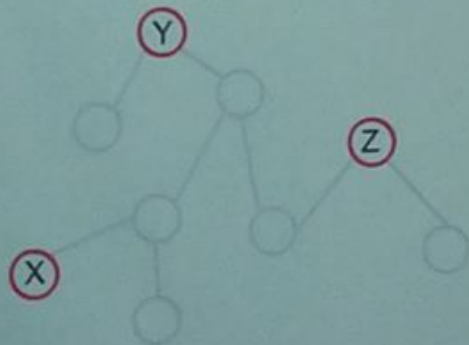
- Rolling hash
- KMP

# 題目 7.不回家的銷售員



## 題目敘述

- 給一個無根樹，邊上有權重
- M 次的查詢，每個查詢包含若干的節點
  - 每次的詢問，找出最短的路徑長度滿足每個指定的節點至少經過一次
  - 所有詢問的節點數量總和小於  $2n$



## 解法 - 所有點都被選到

- 樹的 TSP 長度 = 邊權總和  $\times 2$  - 最遠點對距離(樹直徑)
- 樹直徑
  - 隨意找一個節點  $s$
  - dfs 找距離  $s$  最遠的節點  $u$
  - dfs 找距離  $u$  最遠的節點  $v$
  - $u$  到  $v$  的距離即為樹直徑
- 邊權總和
  - 直接把每條邊權重相加



## 解法 - 找子圖的樹直徑

- 樹直徑
  - 隨意找一個被選到的節點  $s$
  - 用 LCA 查詢距離  $s$  最遠的節點  $u$
  - 用 LCA 查詢距離  $u$  最遠的節點  $v$
  - $u$  到  $v$  的距離即為樹直徑

## 解法 - 找子圖的樹邊權總和

- 樹邊權總和
  - 把選到的節點按照 dfs order 排序成  $v_1, v_2, \dots, v_k$
  - 邊權總和 =  
(  $v_1$  的深度 +  $v_2$  的深度 + ... +  $v_k$  的深度 )  
- (  $LCA(v_1, v_2)$  的深度 + ... +  $LCA(v_k, v_1)$  的深度 )

# 題目 8. 摩天大樓



## 題目敘述

$$\min_{1 \leq i \leq k} |f_i - l| a_i$$

對每一個住戶來說,  $f_i$  為第  $i$  個公設位置,  $a_i$  為該住戶對第  $i$  個公設地厭惡程度,  $l$  為該住戶住的位子。

上述方程式為單一住戶的喜愛的程度。

求在最佳排列下滿意度最低住戶的滿意度



## subtask1

- $k=1$ , 且因為每個人離該公設越遠越好, 所以公設一定在頂點。

## 方法

第一步:二分搜答案  $O(\log 100)$

第二步:窮舉四個公設位子  $O(n^k)$

第三步:算出每個人可以放在哪個位子

邊 $O(n^2)$ 條

並做最大二分匹配  $O(n^3)$

## 方法優化

- 第一個公設一定放在前半位子，如果放在後面可以整串反轉。
- 做max match時，如果有任何一個住戶不能匹配，可以提早cut。
- 也可以用Hopcroft-Karp or Dinic max flow做到  $O(\sqrt{n} * n^2)$
- bitmask